TakiAcademy
- www.takiacademy.com -

★★★★★★★★★

Mathématiques

★★★★★★★★★

Prof : Abbes Amor – Lycée Pilote Monastir

Section : 4éme Sc-Exp

Révision Bac 2019 : Sujet n° 05

Durée : 3 H 00 mn | **Date : 25/05/2019**

EXERCICE N°1 : 5 points

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout réel θ appartient à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ les équations :

$(E_\theta): z^2-2(1+i\sin 2\theta)\,z+2i\sin 2\theta=0$ et $(T_\theta): z^3-(3+2i\sin 2\theta)\,z^2+(2+4i\sin 2\theta)\,z-2i\sin 2\theta=0$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

b) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (T_θ).

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (T_θ).

2) On considère les points *A, M, N* d'affixes respectives : $z_A=1$; $z_M=1+e^{2i\theta}$ et $z_N=1-e^{-2i\theta}$.

a) Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

b) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) a) Montrer que le triangle AMN est isocèle en *A*.

b) Déterminer θ pour que le triangle AMN soit équilatéral.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6-\left(2+i\sqrt{3}\right)z^3+i\sqrt{3}=0$.

(On donnera les solutions sous forme exponentielle)

EXERCICE N°2 : 4 points

Dans une entreprise il ya 20 employés dans deux départements selon ce tableau :

	Département technique	Département administratif
Femmes	3	5
Hommes	10	2

1) Le directeur de l'entreprise veut offrir un cadeau à l'un des employés, choisi au hasard.

On considère les évènements suivant : F : « L'employé choisi est une femme » ;

H : « L'employé choisi est un homme » ; T : « L'employé choisi est du département technique »

A : « L'employé choisi est du département administratif ».

a) Calculer les probabilités suivantes : p(F), p(F∩T), p(F/A) et p(F/T).

b) Sachant que l'employé choisi est un homme, quelle est la probabilité qu'il soit du département technique ?

2) Dans une autre occasion, le directeur choisit au hasard et simultanément deux employés du Département technique et choisit aussi un employé du département administratif.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de femme choisies.

Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE N°3 : 4 points

L'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(0,1,2)$; $B(1,2,0)$ et $C(2,0,1)$.

1) a) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan P et qu'une équation cartésienne de $P : x+y+z-3=0$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et tangente à P et trouver les coordonnées du point de contact H.

2) Soit $m \in IR$ et les points $E(m,\sqrt{3},-\mathrm{m})$; $F(m,-\sqrt{3},-m)$.

On désigne par S_m l'ensemble des points M de l'espace tel que $ME^2+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EF}=0$.

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère de diamètre $[EF]$.

b) Soit I_m le centre de S_m. Montrer que l'ensemble des points I_m est une droite Δ parallèle à P.

c) Montrer que pour $m \in IR$, S_m est tangente à P.

3) Soit J_m le point de contact de S_m et P. Déterminer *m* pour que la distance $J_mJ_{-m}=4\sqrt{2}$.

EXERCICE N°4 : 7 points

I– On considère la fonction *f* définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : 2cm)

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, (On pourra écrire $f(x)=\dfrac{e}{\sqrt{x}}\times\dfrac{x}{e^x}$).

Interpréter graphiquement le résultat.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\,e^{1-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

3) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

II– On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n=\int_n^{n+1} f(t)dt$.

1) Interpréter graphiquement u_n.

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $f(n+1)\le u_n \le f(n)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4) Montrer que (u_n) est convergente. Calculer sa limite.

III- On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2) a) Montrer que pour tout réel positif t, $t+1\geq 2\sqrt{t}$.

b) En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $F(x)\leq\frac{1}{2}\int_1^x (t+1)e^{1-t}\ dt$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x\in[1,+\infty[$:

$$\int_1^x (t+1)\,e^{1-t}\ dt=3-(2+x)e^{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $0\leq F(x)\leq\frac{3}{2}$.

3) On note pour tout $n\in IN^*$, S_n la somme des $(n-1)$ premier termes de la suite (u_n).

a) Justifier que pour tout $n\in IN^*$, $S_n=F(n)$.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente. Donner un encadrement de la limite de S_n.